

DOI: 10.16285/j.rsm.2018.0237

群桩基础引发饱和地基振动的近似解析解

史 吏¹, 王慧萍¹, 孙宏磊², 潘晓东¹

(1. 浙江工业大学 建筑工程学院, 浙江 杭州 310014; 2. 浙江大学 建筑工程学院, 浙江 杭州 310058)

摘 要: 建立了饱和半空间-群桩基础耦合动力近似解析模型, 其中基桩考虑为欧拉梁, 饱和地基采用 Biot 两相介质动力控制方程, 二者在频率-波数域中利用桩-土相互作用点处的饱和地基柔度矩阵进行耦合, 并采用快速傅里叶逆变换获得频域解答。分析了饱和地基中群桩基础的动力阻抗及刚性承台上施加简谐振动荷载时群桩基础引起的饱和地基振动响应。研究结果表明, 荷载类型、激振频率以及地基渗透系数对饱和地基位移和孔压响应有明显影响。特别的, 群桩基础动力阻抗峰值频率会随着地基渗透系数的增加而增大。

关 键 词: 饱和地基; 振动; 桩-土相互作用; 动力响应; 解析模型

中图分类号: TU 473

文献标识码: A

文章编号: 1000-7598 (2019) 05-1750-11

Approximate analytical solution on vibrations of saturated ground induced by pile foundations

SHI Li¹, WANG Hui-ping¹, SUN Hong-lei², PAN Xiao-dong¹

(1. College of Civil Engineering and Architecture, Zhejiang University of Technology, Hangzhou, Zhejiang 310014, China;

2. College of Civil Engineering and Architecture, Zhejiang University, Hangzhou, Zhejiang 310058, China)

Abstract: An approximate analytical model has been established in this paper to study dynamic interactions between the saturated soil and the pile group with assumption of poroelastic half-space. The piles are modeled as Bernoulli-Euler elastic beams, and the saturated half-space is governed by Biot's dynamic equations. The pile beams and the saturated half-space are coupled through receptance matrix established at pile/soil interaction points in frequency-wavenumber domain. Results are obtained by fast Fourier transform. The dynamic impedances of the pile group have been analyzed. Meanwhile, the results demonstrated that the type and frequency of the excitation force and the soil permeability have significant influences on displacement and pore pressure responses of the saturated ground. Especially, it is noted that peak frequencies of pile-foundation impedance increase along with the increasing of soil permeability.

Keywords: saturated ground; far-field vibrations; pile-soil interactions; dynamic response; analytical mode

1 引 言

近年来我国修建了大量高速铁路, 高铁运行速度高达 350 km/h, 且往往靠近企业、科研院所以及居民区等振动敏感建筑^[1], 使得高铁运行产生的环境振动问题备受关注。我国东南沿海软土地区的高铁线路采用高架形式, 即轨道通过桥梁和桥墩支撑于群桩基础上。群桩基础埋置于土体中, 是地基振动的直接激振源, 而且有必要研究群桩基础引发的地基振动, 从而为高架高速铁路环境振动水平的预测和防治提供理论依据。

在桩-土的相互作用方面, 国内外学者已经做出了一系列的研究工作。通过严格考虑桩土界面几何尺寸和接触条件, Rajapakse^[2]、Pak^[3]等采用 Hankel 积分变换求解了弹性半空间中单桩的水平和竖向动力阻抗。类似的, Zeng 等^[4]研究了饱和半空间中单桩的轴向荷载传递问题。此类严格解析方法往往以带圆柱形空腔半空间的 Green 函数为基础, 无法直接用于群桩基础和地基的动力相互作用研究。数值方法, 如有限元^[5]、边界元^[6]、有限元-离散元结合法^[7], 能直接对基桩和地基进行空间离散, 可考虑桩-土接触条件从而分析群桩基础与单相地基或饱

收稿日期: 2018-02-07

基金项目: 国家自然科学基金项目 (No. 51608482, No. 51620105008); 国家重点研发计划项目 (No. 2016YFC0800200)。

This work was supported by the National Natural Science Foundation of China (51608482, 51620105008) and the National Key R&D Program of China (2016YFC0800200).

第一作者简介: 史吏, 男, 1987 年生, 博士, 副教授, 主要从事土与结构相互作用和地基处理研究工作。E-mail: lishi@zjut.edu.cn

和地基^[8-9]的动力相互作用问题。但上述数值分析方法往往需要大量的单元来离散桩-土界面以及三维地基, 且需要引入人工边界条件吸收外行波能量方能准确模拟半空间的动力特性。因此学者多将基桩模拟为一维欧拉梁^[10](横向受力)和一维杆件^[11](纵向受力), 并通过引入群桩动力相互作用因子^[12-15]的简化方法求解群桩基础的动力阻抗以及基桩的荷载分担和传递规律。但该简化方法无法获得地基的振动响应。部分学者基于连续介质理论, 采用积分变换法或势函数展开法解析获得均质半空间的 Green 函数^[16-17]之后, 再引入位移连续和应力平衡条件从而求解桩-土动力相互作用问题。对于成层地基, Nogami^[18]利用薄层单元法建立了轴对称饱和地基模型, 求解了单桩阻抗函数。薄层单元法仅需在地基深度方向进行单元离散, 显著减小了计算量。在此基础上, 王鹏等^[19]基于薄层单元法获得了三维饱和半空间的 Green 函数, 并用于群桩基础和饱和地基动力相互作用分析中^[20]。

综上所述, 已有研究利用解析方法、数值方法和简化方法研究了单桩或群桩基础与弹性地基或饱和地基的动力相互作用问题, 主要侧重于桩基础动力阻抗、承台动载的基桩分担比例以及动荷载沿基桩传递规律等方面, 同时关于不同桩间距、桩数对阻抗的影响研究已较多, 而较少关注动荷载下桩基础引发的地基振动问题。

考虑到我国东南沿海软土地区的地下水位较高, 土体多呈饱和状态, 本文利用饱和半空间的 Green 函数近似解析求解了群桩基础和饱和地基的动力相互作用问题, 在获得群桩基础动力阻抗的同时, 研究了承台中心施加简谐荷载和弯矩时的饱和地基振动位移和孔压响应。

2 群桩基础-饱和地基动力相互作用近似解析模型

建立如图 1 所示的 2×2 摩擦型群桩基础-饱和半空间动力相互作用模型, x 和 y 为水平方向, z 为地基深度方向, s 为桩间距。假设承台为高桩承台, 即不考虑承台的埋置且不计入承台底面与地基的接触。承台设为刚性、基桩和饱和地基均考虑为线弹性体, 且基桩与土体考虑为完全接触。为获得饱和地基自由场动力响应, 沿观察线 1 ($y=0, z=0$) 布置观察点, 记录地表位移分布。沿观察线 2 ($x=2.5s, y=0$) 布置观察点, 记录地基孔压的深度分布。观察点沿观察线 1 按 $0.25s$ 间距均匀分布, 分布区间为 $0 \leq x \leq 5s$; 观察线 2 位于观察点

($2.5s, 0, 0$) 正下方。

2.1 群桩基础

设基桩为正方形布置, 基桩桩长为 L_p , 桩径为 d 。桩体的弹性模量和质量密度分别记为 E_p 和 ρ_p , 不考虑材料桩身材料阻尼。沿深度方向将基桩划分为 l 个圆柱单元, 取各单元中心为该单元的代表节点, 从而在各离散节点上进行桩-土相互作用分析。

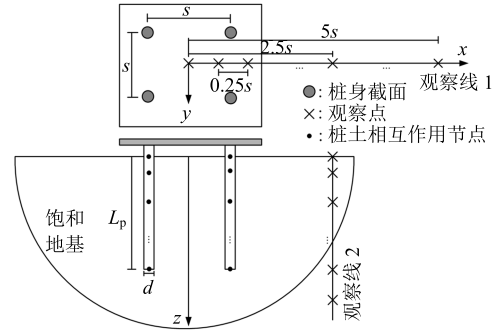


图 1 群桩基础和三维饱和地基动力相互作用分析模型

Fig.1 Analysis model for pile group and 3D saturated ground

减缩桩身节点自由度, 参照 Kaynia 等^[16]的工作, 即可获得桩端节点位移 U_e 与荷载矢量 P_e 的关系式:

$$P_e = [K_p + \psi_p^T (F_s + F_p)^{-1} \psi_p] U_e = K_e U_e \quad (1)$$

式中: K_p 为基桩刚度矩阵; ψ_p 为基桩形变函数矩阵; F_p 为基桩柔度矩阵; K_e 为减缩后的桩端节点刚度矩阵, 且有

$$K_e = [K_p + \psi_p^T (F_s + F_p)^{-1} \psi_p] \quad (2)$$

由 Kaynia 等^[16]的文献可知, F_s 应为带孔洞(桩位)地基的柔度矩阵, 但无法解析获得。方便起见, 下节仍采用规则半空间地基解析计算 F_s 。但此时, 桩体与桩位土体的质量和模量重叠, 本文将桩体弹模和密度分别减去土体弹性模量 E 和密度 ρ 后作为实际计算量, 以消除上述重叠现象的影响, 即实际计算中, 基桩弹性模量和密度分别为 $E_p^* = E_p - E$ 和 $\rho_p^* = \rho_p - \rho$ 。

2.2 饱和半空间柔度矩阵

地基考虑为均质饱和半空间, 遵循 Biot 两相介质动力控制方程^[21], 在柱坐标系 $r-\theta-z$ 中频域表达式为

$$G \left(\nabla^2 u_r - \frac{1}{r^2} u_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) + (\lambda + \alpha^2 M + G) \frac{\partial e}{\partial r} + \alpha M \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} = -\rho \omega^2 u_r - \rho_w \omega^2 w_r \quad (3)$$

$$G\left(\nabla^2 u_\theta - \frac{1}{r^2} u_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right) + (\lambda + \alpha^2 M + G) \frac{\partial e}{r \partial \theta} + \alpha M \frac{\partial \varepsilon}{r \partial \theta} = -\rho \omega^2 u_\theta - \rho_w \omega^2 w_\theta \quad (4)$$

$$G \nabla^2 u_z + (\lambda + \alpha^2 M + G) \frac{\partial e}{\partial z} + \alpha M \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} = -(\rho \omega^2 u_z + \rho_w \omega^2 w_z) \quad (5)$$

$$\alpha M \frac{\partial e}{\partial r} + M \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} = -\rho_w \omega^2 u_r - \rho \omega^2 w_r + i b \omega w_r \quad (6)$$

$$\alpha M \frac{\partial e}{r \partial \theta} + M \frac{\partial \varepsilon}{r \partial \theta} = -\rho_w \omega^2 u_\theta - \rho \omega^2 w_\theta + i b \omega w_\theta \quad (7)$$

$$\alpha M \frac{\partial e}{\partial z} + M \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} = -\rho_w \omega^2 u_z - \rho \omega^2 w_z + i b \omega w_z \quad (8)$$

式中: u_r 、 u_θ 、 u_z 分别为土骨架径向、周向和竖向位移; w_r 、 w_θ 、 w_z 分别为上述 3 个方向上孔隙流体相对于土骨架的平均位移; α 、 M 为 Biot 常数; λ 、 G 为土骨架拉梅常数; $\rho = n\rho_w + (1-n)\rho_s$, n 为孔隙度, ρ_s 和 ρ_w 分别为土骨架和孔隙流体的质量密度; $\rho = \rho_w / n$; $b = \rho_w g / k_D$, k_D 为饱和地基 Darcy 渗透系数, g 为重力加速度; ∇^2 为 Laplace 算子; ω 为圆频率; e 、 ε 分别为土骨架和孔隙流体的体积应变。

通过引入饱和土体特征频率 $\omega_0 = b\rho / (9\rho - \rho_w^2)$, 可定义频率比 $\chi = \omega / \omega_0$ 。Degrande 等^[22]研究指出: 当 $\chi < 0.1$ 时为低频段, 土骨架和孔隙流体间的黏性耦合占主导; 当 $\chi > 10$ 时为高频段, 二者之间的惯性耦合占主导; 当 $0.1 < \chi < 10$ 为过渡段, 处于从黏性耦合到惯性耦合的过渡状态。 e 、 ε 表达式如下:

$$e = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_\theta}{r \partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (9)$$

$$\varepsilon = \frac{\partial w_r}{\partial r} + \frac{w_r}{r} + \frac{\partial w_\theta}{r \partial \theta} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \quad (10)$$

饱和土体竖向 σ_z 、径向 τ_{zr} 、切向 $\tau_{z\theta}$ 应力以及超静孔隙水压力 q 表达式为

$$\sigma_z = 2G \frac{\partial u_z}{\partial z} + \lambda e \quad (11)$$

$$\tau_{zr} = G \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \quad (12)$$

$$\tau_{z\theta} = G \left(\frac{\partial u_z}{r \partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) \quad (13)$$

$$q = -\alpha M \theta + M \zeta \quad (14)$$

将土骨架和孔隙流体位移关于周向坐标 θ 作

Fourier 级数展开, 再关于轴向坐标 r 作 Hankel 变换, 可将偏微分控制方程 (3) ~ (8) 化为频域-Hankel 变化域关于竖向坐标 z 的常微分方程, 解之即得饱和半空间位移和应力的频域-Hankel 变换域基本解, 具体求解过程可参见 Chen 等^[23]研究。设饱和半空间内部 z' 深度处作用一个集中荷载, 其表达式为

$$\mathbf{F}(r, \theta, z) = f_r(r, \theta, z') \delta(z - z') \mathbf{e}_r + f_\theta(r, \theta, z') \delta(z - z') \mathbf{e}_\theta + f_z(r, \theta, z') \delta(z - z') \mathbf{e}_z \quad (15)$$

式中: f_r 、 f_θ 和 f_z 分别为荷载沿 3 个坐标轴的分量; $\delta(\cdot)$ 为狄拉克函数; $\mathbf{e}_r$ 、 $\mathbf{e}_\theta$ 、 $\mathbf{e}_z$ 分别为坐标矢量。荷载关于周向坐标 θ 作 Fourier 级数展开, 并关于轴向坐标 r 作 Hankel 变换后, 可有

$$\tilde{f}_{(r+\theta)m,k}(p, z') = \frac{1}{p} \{ H^{m+1} [f_{rm,k}(r, z') + f_{\theta m,k}(r, z')] + H^{m-1} [f_{rm,k}(r, z') - f_{\theta m,k}(r, z')] \} \quad (16)$$

$$\tilde{f}_{(r-\theta)m,k}(p, z') = \frac{1}{2p} \{ H^{m+1} [f_{rm,k}(r, z') + f_{\theta m,k}(r, z')] - H^{m-1} [f_{rm,k}(r, z') - f_{\theta m,k}(r, z')] \} \quad (17)$$

$$\tilde{f}_{zm,k}(p, z') = H^m [f_{zm,k}(r, z')] \quad (18)$$

式中: m 为 Fourier 级数; $H^m[\cdot]$ 为第 m 阶 Hankel 变换; $k = 1, 2$; 上标 “~” 为 Hankel 变换域; p 为波数。

假设半空间表面透水则 $q=0$, Chen 等^[23]根据 z' 深度处的位移和应力连续条件, 给出了式 (16) ~ (18) 荷载形式下, 饱和半空间位移和孔压的频域-Hankel 变换域解答。

假设图 1 所示桩土相互作用节点上的作用力为直径等于桩径 d 的圆盘单位荷载, 则对于水平 (r 方向) 圆盘荷载可有

$$\tilde{f}_{(r+\theta)m,k}(p, z') = \begin{cases} \frac{4J_1(pd/2)}{\pi dp^2}, & m=1, k=1 \\ 0, & m, k \text{ 其他取值} \end{cases} \quad (19)$$

$$\tilde{f}_{(r-\theta)m,k}(p, z') = \begin{cases} -\frac{2J_1(pd/2)}{\pi dp^2}, & m=1, k=1 \\ 0, & m, k \text{ 其他取值} \end{cases} \quad (20)$$

$$\tilde{f}_{zm,k}(p, z') = 0, \quad m=0, 1, 2, \dots; \quad k=1, 2 \quad (21)$$

式中: $J_1(\cdot)$ 为一阶 Bessel 函数。

对于竖向 (z 向) 圆盘荷载, 有

$$\tilde{f}_{(r+\theta)m,k}(p, z') = 0, \quad m=0, 1, 2, \dots; \quad k=1, 2 \quad (22)$$

$$\tilde{f}_{(r-\theta)m,k}(p, z') = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots; \quad k = 1, 2 \quad (23)$$

$$\tilde{f}_{zm,k}(p, z') = \begin{cases} \frac{2J_1(pd/2)}{\pi dp}; & m = 0, k = 1 \\ 0; & m, k \text{ 其他取值} \end{cases} \quad (24)$$

分别将式(19)~(24)代入 Chen 等^[23]给出的一般解答,再关于波数 p 作 Hankel 逆变换,即可获得桩土作用点 i 处分别作用水平和竖向圆盘荷载时,作用点 j 处土骨架位移和孔压响应的频域-空间域解答,具体表达式可参见文献^[23],此处不再重复。 i 和 j 遍历所有桩土作用点,即可获得式(1)所需的地基柔度矩阵。

2.3 群桩基础动力阻抗

将桩端自由度矢量重写为

$$\mathbf{U}_e^j = \{\mathbf{U}_{e1}^j \quad \mathbf{U}_{e2}^j\} \quad (25)$$

其中:

$$\mathbf{U}_{e1}^j = \{u_{0x}^j \quad \varphi_{0x}^j \quad u_{0y}^j \quad \varphi_{0y}^j \quad u_{0z}^j\}^T \quad (26)$$

$$\mathbf{U}_{e2}^j = \{u_{(l+1)x}^j \quad \varphi_{(l+1)x}^j \quad u_{(l+1)y}^j \quad \varphi_{(l+1)y}^j \quad u_{(l+1)z}^j\}^T \quad (27)$$

对应的,桩端荷载矢量记为

$$\mathbf{P}_e^j = \{\mathbf{P}_{e1}^j \quad \mathbf{P}_{e2}^j\} \quad (28)$$

j 遍历所有基桩后,集总桩端自由度和荷载矢量关系式可重写为

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{P}_e^1 \\ \mathbf{P}_e^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_e^{11} & \mathbf{K}_e^{12} \\ \mathbf{K}_e^{21} & \mathbf{K}_e^{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_e^1 \\ \mathbf{U}_e^2 \end{Bmatrix} \quad (29)$$

其中:

$$\mathbf{P}_e^1 = \{\mathbf{P}_{e1}^1 \quad \mathbf{P}_{e1}^2 \quad \dots \quad \mathbf{P}_{e1}^{n \times n}\} \quad (30)$$

$$\mathbf{P}_e^2 = \{\mathbf{P}_{e2}^1 \quad \mathbf{P}_{e2}^2 \quad \dots \quad \mathbf{P}_{e2}^{n \times n}\} \quad (31)$$

$$\mathbf{U}_e^1 = \{\mathbf{U}_{e1}^1 \quad \mathbf{U}_{e1}^2 \quad \dots \quad \mathbf{U}_{e1}^{n \times n}\} \quad (32)$$

$$\mathbf{U}_e^2 = \{\mathbf{U}_{e2}^1 \quad \mathbf{U}_{e2}^2 \quad \dots \quad \mathbf{U}_{e2}^{n \times n}\} \quad (33)$$

此处考虑摩擦性群桩基础,即桩底自由,从而 $\mathbf{P}_e^2 = 0$,由此即可消去桩底自由度 $\mathbf{U}_e^2$,最终得仅包括桩顶自由度 $\mathbf{U}_e^1$ 和桩顶荷载 $\mathbf{P}_e^1$ 的控制方程:

$$\mathbf{P}_e^1 = \left\{ \mathbf{K}_e^{11} - \mathbf{K}_e^{12} (\mathbf{K}_e^{22})^{-1} \mathbf{K}_e^{21} \right\} \mathbf{U}_e^1 \quad (34)$$

根据承台刚体运动特性,承台形心荷载 $\mathbf{P}_c$ 和位移矢量 $\mathbf{U}_c$ 与各基桩桩顶荷载和位移矢量联系存在如下关系:

$$\mathbf{U}_c^1 = \mathbf{T} \mathbf{U}_e \quad (35)$$

$$\mathbf{P}_c = \mathbf{T}^T \mathbf{P}_e^1 \quad (36)$$

式中:矩阵 $\mathbf{T}$ 为承台刚体几何变换矩阵,具体为

$$\mathbf{T} = [\mathbf{T}_1 \quad \mathbf{T}_2 \quad \dots \quad \mathbf{T}_i \quad \dots \quad \mathbf{T}_{n \times n}]^T \quad (37)$$

子矩阵 $\mathbf{T}_i$ 表示基桩 i 桩顶节点与承台形心 O 之间的几何变换矩阵,且有

$$\mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & z_i - z_c & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(z_i - z_c) & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & y_i - y_c & 0 & -(x_i - x_c) & 1 \end{bmatrix} \quad (38)$$

式中: (x_i, y_i, z_i) 和 (x_c, y_c, z_c) 分别为基桩 i 桩头节点和承台形心 O 的坐标,本文假设形心 O 与基桩桩顶在同一平面上,即 $z_c = z_i$ 。

代入式(34)~(36),即可得刚性承台形心 O 的荷载矢量 $\mathbf{P}_c$ 和位移矢量 $\mathbf{U}_c$ 间的联系方程:

$$\mathbf{P}_c = \left\{ \mathbf{T}^T \left[\mathbf{K}_e^{11} - \mathbf{K}_e^{12} (\mathbf{K}_e^{22})^{-1} \mathbf{K}_e^{21} \right] \mathbf{T} \right\} \mathbf{U}_c = \mathbf{K}_c \mathbf{U}_c \quad (39)$$

式中: $\mathbf{K}_c$ 即为带刚性承台群桩基础的动力阻抗矩阵,其元素为 K_{ij} 。 K_{ij} 为频域复刚度,可进一步记为

$$K_{ij} = k_{ij} + i a_0 c_{ij} \quad (40)$$

式中: k_{ij} 和 c_{ij} 分别为群桩基础的动刚度和动阻尼; $i, j = x, \theta_x, y, \theta_y, z$, 分别对应刚体沿 x 轴平动、绕 x 轴转动、沿 y 轴平动、绕 y 轴转动和沿 z 轴平动自由度; a_0 为无量纲激振频率,记为

$$a_0 = \frac{\omega d}{c_{s0}} \quad (41)$$

式中: $c_{s0} = \sqrt{G/\rho}$ 为饱和土体剪切波速。

2.4 饱和地基振动求解

当刚性承台形心 O 作用简谐振动荷载 $P_0 e^{i \omega_0 t}$ 时,可由式(39)算得承台位移矢量 $\mathbf{U}_c$,继而可由式(35)算得基桩桩顶位移矢量 $\mathbf{U}_e^1$,利用式(29)第二行和 $\mathbf{P}_e^2 = 0$ 可算得 $\mathbf{U}_e^2$,再根据形变函数矩阵 $\boldsymbol{\Psi}_p$,即可求得基桩桩身节点位移矢量 $\mathbf{U}$ 。将2.2节中在桩-土作用点建立的饱和半空间柔度矩阵求逆,再乘以矢量 $\mathbf{U}$,即可得基桩各节点的桩土作用力矢量 $\mathbf{P}$ 。

与2.2节建立桩土作用点的地基柔度矩阵相同,可形成桩土作用点和图1所示各观察点之间的柔度矩阵 $\mathbf{F}_{s0}$,桩-土作用力矢量 $\mathbf{P}$ 乘以柔度矩阵 $\mathbf{F}_{s0}$ 即得各观察点的位移和孔压响应。由于是稳态响应,后续结果呈现时均略去 $e^{i \omega_0 t}$ 。

3 基桩单元离散收敛性分析

如图1所示,桩-土相互作用分析中需对基桩进行单元离散。为研究桩单元数目对基桩阻抗的影响,将饱和地基退化为单相弹性地基,求解弹性地基中单桩的阻抗,并与弹性半空间中单桩的竖向静刚度理论解进行对比,从而提出基桩单元数目的划分依据。

将式(3)~(7)中孔隙流体相关参数取小值,以无量纲形式给出,即 $M^* = M/G = 0.01$ 、 $\alpha = 0.01$ 、 $\mathcal{G}^* = \mathcal{G}/\rho = 0.01$ 、 $b^* = bd/\sqrt{\rho G} = 0.01$ 和 $\rho^* = \rho_w/\rho = 0.01$, 可将饱和地基退化为单相弹性地基,弹性地基和基桩参数选取 $\lambda^* = \lambda/G = 4$; $E_p/E = 100$; $L_p/d = 20$; $\rho_p/\rho = 1.43$, 其中 E 为土骨架弹性模量,可由拉梅常数算得。

计算中,基桩单元划分密度 $\Delta h^*/\lambda_{\min}^*$ 从 0.32 逐渐增大至 0.03。其中 $\Delta h^* = \Delta h/d$ 为无量纲基桩圆柱单元长度, $\lambda_{\min}^* = \lambda_{\min}/d = 2\pi/\max a_0$ 为无量纲地基最小波长。图2为各单元划分密度下 $a_0 = 0.1$ 时的无量纲单桩竖向刚度值 k_{zz}/k_{zz0} , 其中 k_{zz0} 为弹性地基中单桩静刚度理论值,当 $a_0 \rightarrow 0$ 时, $k_{zz}/k_{zz0} \rightarrow 1$ 。

采用矩形叠加法进行 Hankel 积分逆变换,逆变换区间则为 $[0, 5p_{\max}^*]$, 步长为 $p_{\max}^*/100$, 其中 $p_{\max}^* = 2\pi/\lambda_{\min}^* = \max a_0$ 。

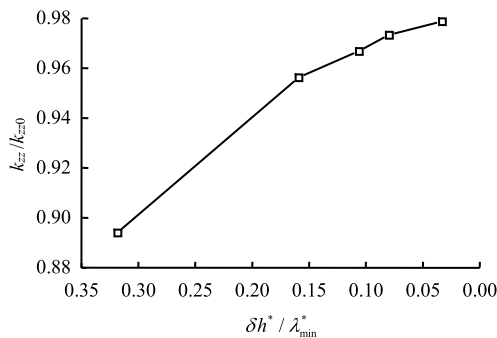


图2 基桩单元离散收敛性分析

Fig.2 Convergence analysis for increasing pile segments

由图2可知,随着基桩单元划分密度的增加,低频时的单桩竖向刚度逐渐收敛于静刚度理论解,说明了本文所建立的桩-土耦合动力分析算法的收敛性。后续计算中,基桩单元划分密度 $\Delta h^*/\lambda_{\min}^*$ 取为 0.06,可在保证计算结果准确性的同时,提高计算效率。

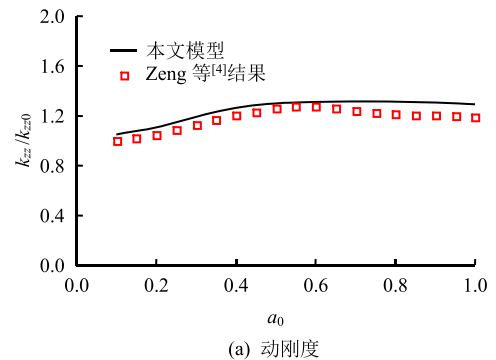
4 模型验证

4.1 饱和半空间单桩阻抗

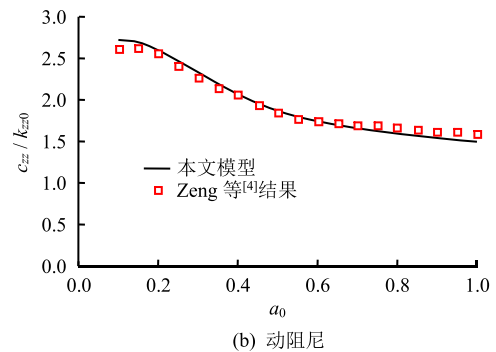
为验证本文分析模型的正确性,计算了饱和半空间中单桩的竖向动力阻抗,并与 Zeng 等^[4]的解析

结果进行对比,如图3所示。图中横坐标为无量纲频率 a_0 ,纵坐标为单桩动力阻抗除以其静刚度 k_{zz0} 进行无量纲化。参照 Zeng 等^[4]选取饱和土体和桩体材料,并以无量纲形式给出: $\lambda^* = 1.5$; $\alpha = 0.97$; $M^* = 12.2$; $\rho^* = 0.53$; $\mathcal{G}^* = \mathcal{G}/\rho = 1.1$; $b^* = bd/\sqrt{\rho G} = 0$; $\rho_p/\rho = 1.2$; $E_p/E = 1000$; $L_p/d = 10$ 。

由图3可知,本文模型计算结果与 Zeng 等^[4]解析结果吻合较好,说明本文分析模型的正确性。



(a) 动刚度



(b) 动阻尼

图3 饱和地基单桩的竖向动力阻抗

Fig.3 Vertical impedance of single pile embedded in a saturated ground

4.2 饱和半空间群桩阻抗

Maeso 等^[8]采用边界元方法研究了饱和半空间中 2×2 群桩基础的动力阻抗,其饱和地基和群桩基础参数为: $\lambda^* = 1$; $\alpha = 1.0$; $\rho^* = 0.78$; $b^* = 484$; $\mathcal{G}^* = 2.23$; $\beta = 0.05$; $E_p/E = 343$; $\rho_p/\rho = 1.94$; $\nu_p = 0.2$; $M^* = 63$; $L/d = 15$; $s/d = 5$ 。图4对比了上述参数输入下本文模型与 Maeso 等^[8]的计算结果。由图4可知,二者吻合较好,再次说明了本文分析模型的正确性。

5 饱和地基中群桩基础动力阻抗

5.1 参数选取

饱和地基和 2×2 群桩基础材料参数以无量纲形式给出: $\lambda^* = 1$, $\alpha = 1.0$, $M^* = 63$, $\rho^* = 0.5$, $\mathcal{G}^* = 1.26$; b^* 分别为 0.000、0.025、1.000、50.190;

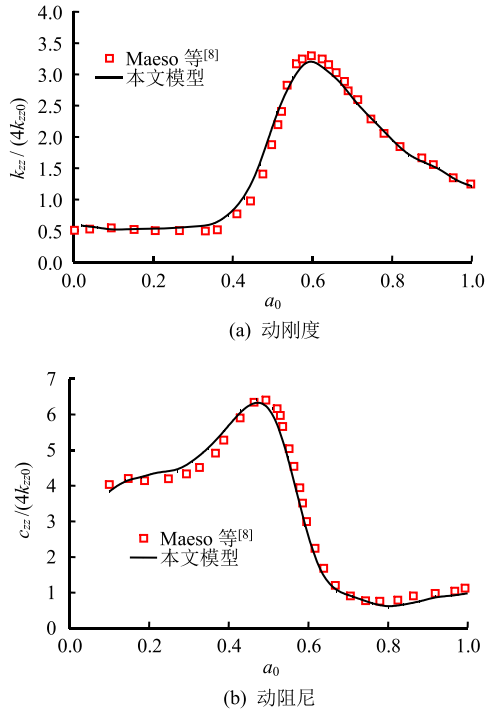


图4 饱和地基2×2群桩的竖向动力阻抗
Fig.4 Vertical impedances of 2×2 pile groups in a saturated ground

$E_p/E = 600$, $s/d = 5$; $\rho_p/\rho = 1.26$; $L_p/d = 40$ 。当激振频率 a_0 取值区间为 $[0,1]$ 时, 上述4种 b^* 取值下的频率比 χ 最大值分别为 $+\infty$ 、20、0.5 和 0.01。此时饱和地基动力响应分别处于高频区段 ($\chi > 10$)、中间过渡区段 ($0.1 < \chi < 10$) 和低频区段 ($\chi < 0.1$)。特别的, 当 $b^* = 0$ 时, 饱和土体流固两相间黏性耦合为 0, 即仅存在惯性耦合和弹性耦合。

5.2 饱和地基群桩基础动力阻抗

由图 5~7 可知, 当激振频率 $a_0 < 0.4$ 时, 各阻抗曲线相对比较平缓, 而当激振频率增加时, 各阻抗曲线出现了峰值。这是因为随着激振频率的增加, 波长减小, 桩间波场干涉相加和相消现象更加明显。同时可知, 随着地基渗透系数的增加 (即 b^* 值降低), 图中各阻抗曲线的出现峰值时所对应的激振频率 a_0 亦增大, 表现为阻抗曲线整体右移。

为了探讨不同桩间距对群桩基础动力阻抗的影响, 采用 5.1 节中的参数, 研究不同的桩间距-直径比 (s/d 分别为 2、5 和 10) 的动力阻抗结果。

由图 8 可知, $s/d = 2$ 时的群桩基础动力阻抗曲线均相对比较平稳, 近似为直线, 此时与实体墩基础的阻抗曲线类似。而当 s/d 增大为 5 和 10 时, 群桩基础阻抗曲线出现了明显的波动, 且峰值明显增大。同时对比图 9、10 可以发现, 当 $s/d = 5$ 时, 阻抗曲线的峰值频率最大, 对于摇摆动力阻抗 (图 8), 可得到当 $s/d = 10$ 时的波动更加明显, 且峰值更大。

当桩间距越小时, 群桩基础振动特性越接近于实体墩基础, 阻抗曲线相对平缓; 随着桩间距的增大, 基桩振动缩激发的行波在地基中的干涉相加和相减作用会更加明显, 主要体现在阻抗曲线波动明显加剧和峰值的显著增加。

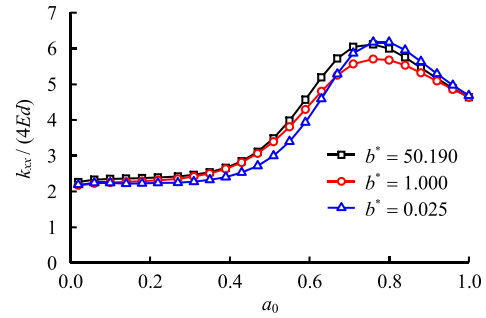


图5 2×2群桩基础水平动力阻抗
Fig.5 Horizontal impedance of 2×2 pile group

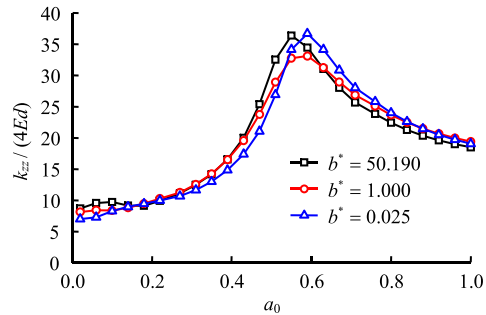


图6 2×2群桩基础竖向动力阻抗
Fig.6 Vertical impedance of 2×2 pile group

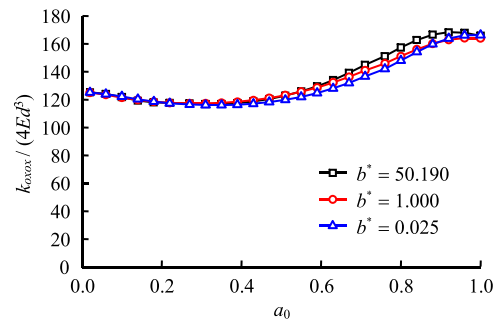


图7 2×2群桩基础摇摆动力阻抗
Fig.7 Wobbling impedance of 2×2 pile group

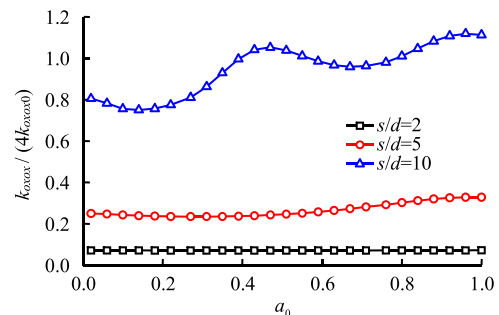


图8 2×2群桩基础摇摆动力阻抗
Fig.8 Wobbling impedance of 2×2 pile group

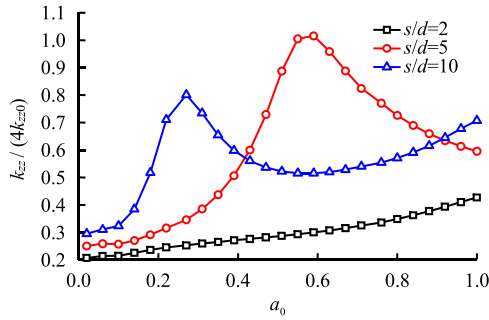


图9 2×2 群桩基础竖向动力阻抗
Fig.9 Vertical impedance of 2×2 pile group

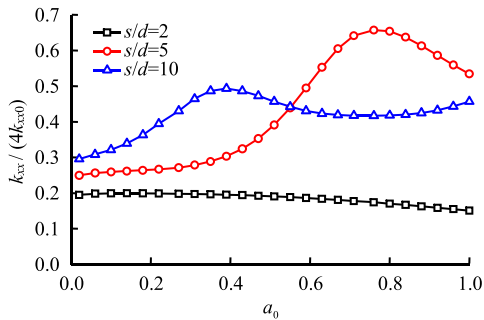


图10 2×2 群桩基础水平动力阻抗
Fig.10 Horizontal impedance of 2×2 pile group

6 饱和地基自由场响应

为研究刚性承台在简谐力和弯矩作用下饱和地基的自由场响应,沿观察线 1 研究地表位移的径向分布,沿观察线 2 研究孔压的深度分布。其中无量纲激振频率 a_0 分别取为 0.1、0.6 和 1.0。

6.1 饱和地基自由场位移响应频谱

施加简谐振动荷载 F_x 、 F_z 、 M_x 至承台中心,取距离承台中心水平距离为 $2.5s$ 的地表观察点,研究该点位移响应随频率的变化,图中纵坐标除以 $1/(Ed)$ 进行无量纲化。

由图 11 和图 12 可知, F_x 和 M_x 作用下的各位移曲线分别在 a_0 约为 0.27 和 0.77 时达到峰值,这是由于群桩基础水平和摇摆阻抗曲线在该频率处出现拐点,且二者是相互耦合的。即阻抗函数关于频率 a_0 的导数为 0,从而地基位移曲线出现峰值。同时, $a_0 \approx 0.27$ 处的阻抗大于 $a_0 \approx 0.77$ 处,从而前者所对应的地基位移峰值大于后者。由图 13 可得,竖向位移随 a_0 的增加逐渐降低,并在 $a_0=0.6$ 附近达到谷值,这是由于图 6 所示的竖向阻抗在该频率处达到峰值,且竖向阻抗与其他阻抗不耦合。

为了探究不同桩间距-直径比对位移响应的影响,施加简谐振动荷载 F_x 、 F_z 、 M_x 至承台中心,取距离承台中心水平距离为 $2.5s$ 的地表观察点。图中纵坐标除以 $1/(Ed)$ 进行无量纲化。

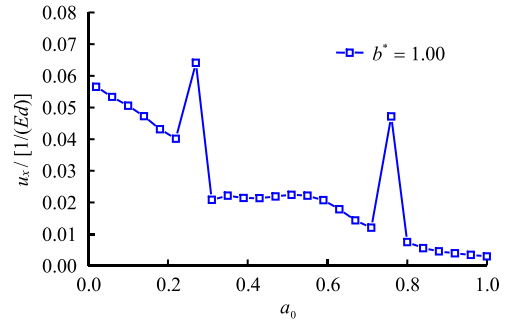


图11 F_x 作用下水平位移 u_x 频谱图
Fig.11 Spectrum for horizontal displacement u_x under the action of F_x

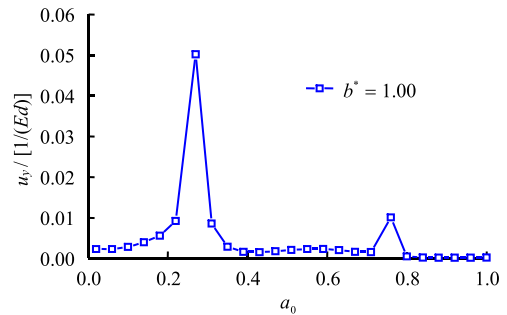


图12 M_x 作用下水平位移 u_y 频谱
Fig.12 Spectrum for horizontal displacement u_y under the action of M_x

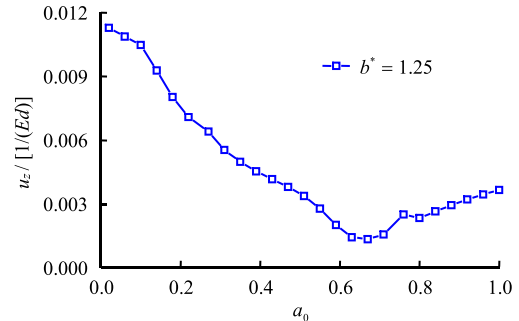
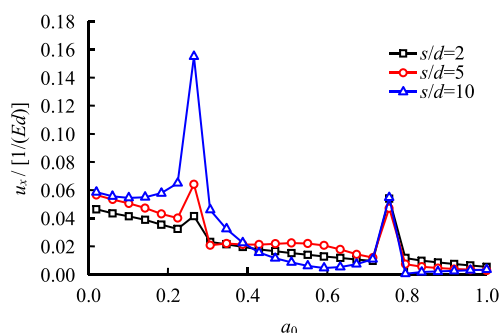
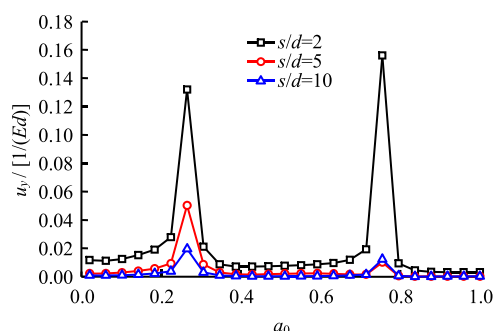
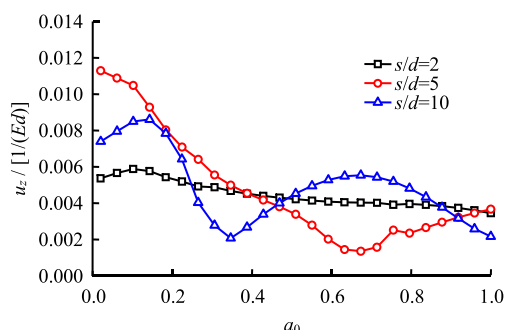


图13 F_z 作用下竖向位移 u_z 频谱
Fig.13 Spectrum for vertical displacement u_z under the action of F_z

由图 14 和 15 可知,对于不同的桩间距-直径比,位移曲线仍均在 $a_0 \approx 0.27$ 和 $a_0 \approx 0.77$ 时达到峰值。在 F_x 作用下,基桩的间距-直径比 $s/d=10$ 时出现的位移峰值最大,而 M_x 作用下则是 $s/d=2$ 时出现了最大的位移峰值。以上两种情况中 $s/d=5$ 的曲线均介于两者之间。在 F_z 作用下(图 16), $s/d=10$ 时曲线出现了明显的波动。由此可知,无量纲激振频率以及基桩的桩间距-直径比均对固定观察点位移产生明显的影响。

6.2 饱和地基地表位移的径向分布

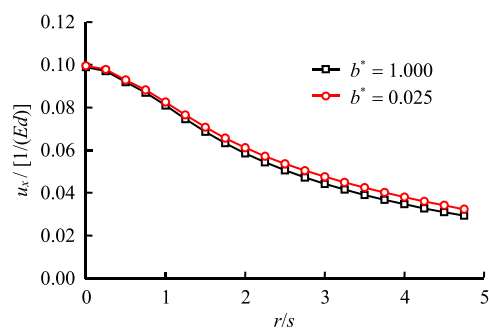
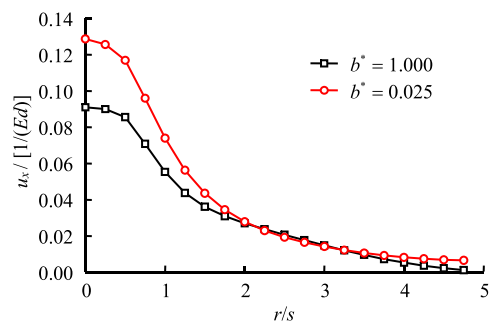
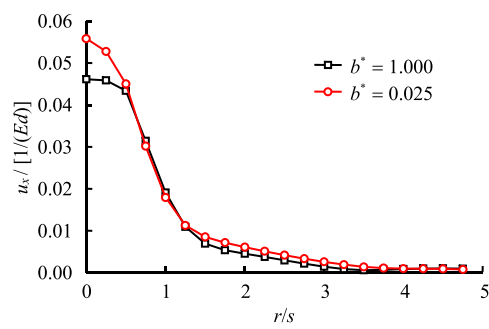
图 17 为承台中心作用水平单位简谐力 F_x 时,其中纵坐标为饱和地基表面水平位移 u_x 除以 $1/(Ed)$

图 14 F_x 作用下水平位移 u_x 频谱图Fig.14 Spectra for horizontal displacement u_x under the action of F_x 图 15 M_x 作用下水平位移 u_y 频谱Fig.15 Spectrum for horizontal displacement u_y under the action of M_x 图 16 F_z 作用下竖向位移 u_z 频谱Fig.16 Spectra for vertical displacement u_z under the action of F_z

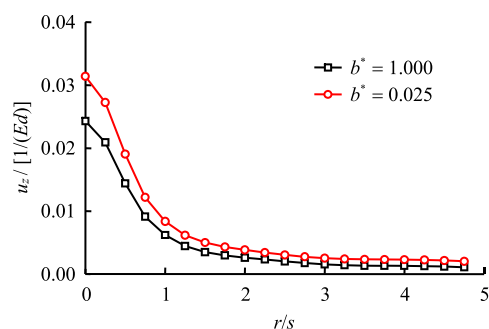
进行无量纲化后的分布情况, 横坐标为观察点与承台中心 O 的距离, 除以桩间距 s 进行无量纲化。

由图 17 可知, 不同频率下的水平位移 u_x 均随着距离 r 的增加而衰减。其中, 当 $a_0 = 0.1$ 时, u_x 单调衰减; 随着激励频率的增加 ($a_0 = 0.6$ 和 $a_0 = 1.0$), u_x 随着 r 的增加出现波动, 且衰减更快。这是因为频率越高, 地基中行波的衰减系数则越大。

由图 17 可知, 各频率下 $b^* = 0.025$ 时的位移峰值均比 $b^* = 1.000$ 时大。原因为 $b^* = 1.000$ 时, 饱和地基流固两相间的黏性耦合更强, 消散了更多的行波能量。

(a) $a_0 = 0.1$ (b) $a_0 = 0.6$ (c) $a_0 = 1.0$ 图 17 F_x 作用下水平向位移 $u_x/(1/Ed)$ 沿观察线 1 的分布Fig.17 Distribution of horizontal displacement $u_x/(1/Ed)$ along observation line 1 with F_x applied

承台作用竖向荷载时, 饱和地基位移响应随频率的变化规律与图 17 相似, 因而图 18 仅呈现了 $a_0 = 0.6$ 时竖向单位简谐力 F_z 作用下的地表竖向位移分布情况。

图 18 F_z 作用下竖向位移 $u_z/(1/Ed)$ 沿观察线 1 的分布Fig.18 Distribution of vertical displacement $u_z/(1/Ed)$ along observation line 1 with F_z applied

对比图 18 和图 17(b)可知, 竖向荷载下的位移响应峰值约为水平荷载作用下的 23%。原因为竖向荷载沿基桩的传递深度大于水平荷载, 从而竖向荷载下的地表位移响应更小。

图 19 为 $a_0 = 0.6$ 时单位简谐弯矩 M_x 作用下的地表水平位移 u_y 的分布情况, 并除以 $1/(Ed)$ 进行无量纲化。

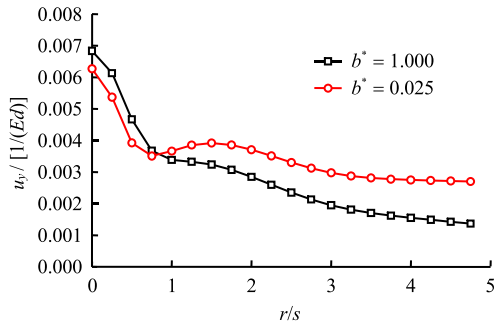


图 19 M_x 作用下水平向位移 $u_y/(1/Ed)$ 沿观察线 1 的分布

Fig.19 Distribution of horizontal displacement $u_y/(1/Ed)$ along observation line 1 with M_x applied

由图 19 可以发现, M_x 作用下的地基位移响应峰值与 F_x 、 F_z 作用下的位移峰值相差很大, 分别约为 F_x 、 F_z 的 6% 和 23%。这是因为 M_x 作用时的振动能量多被桩身转动变形所分担, 进而传递到地基中的能量较小, 造成地基位移响应显著降低。

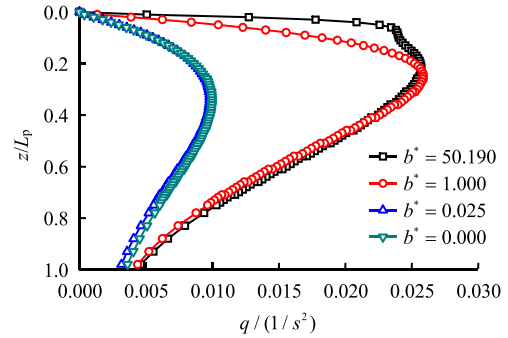
6.3 饱和地基超静孔压的竖向分布

图 20 为承台中心施加单位水平振动荷载 F_x 时地基超静孔压沿深度的分布情况。图中纵坐标为观察点深度 z , 并除以桩长 L_p 进行无量纲化, 横坐标孔压 q 除以 $1/s^2$ 进行无量纲化。

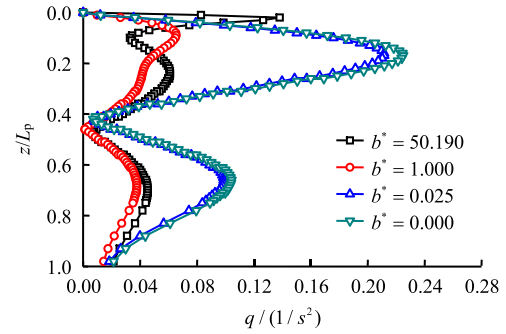
由图 20(a)可知, 当激振频率较低时, 超静孔压峰值局限于基桩深度的上半部分 ($z/L_p \leq 0.5$); 当激振频率增加时, 孔压则出现明显波动, 整个桩长范围内均出现孔压极值, 见图 20(b)和 20(c)。

对比不同渗透系数下的孔压峰值可知: 当激振频率较低时, 低渗透系数 ($b^* = 1.000$ 及 $b^* = 50.190$) 下的孔压峰值更高, 见图 20(a); 随着激振频率增加, 高渗透系数 ($b^* = 0.000$ 及 $b^* = 0.025$) 下的孔压峰值则明显增加, 且高于低渗透系数情形 (图 20(b)和 20(c))。这是因为随着激振频率的增加, 饱和地基固两相间的惯性耦合作用增强, 从而高渗透系数下的饱和地基孔压响应亦不断增大。

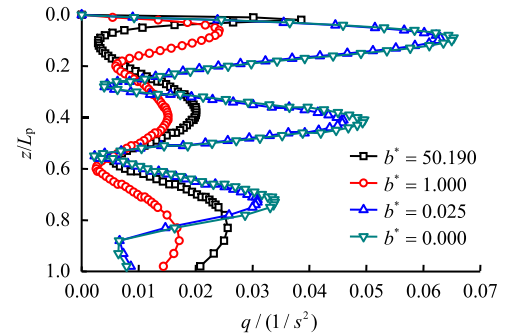
承台作用竖向荷载时, 孔压响应随频率的变化规律与图 20 相似, 因而图 21 仅呈现 $a_0 = 0.1$ 时, 单位竖向振动荷载 F_z 作用下的超静孔压分布。



(a) $a_0 = 0.1$



(b) $a_0 = 0.6$



(c) $a_0 = 1.0$

图 20 F_x 作用下超静孔压沿观察线 2 的分布

Fig.20 Distribution of excess pore pressure along the observation line 2 with F_x applied

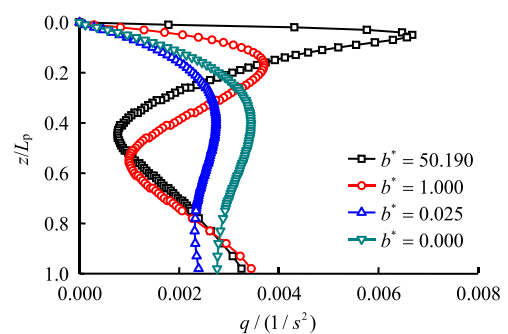


图 21 F_z 作用下超静孔压沿观察线 2 的分布

Fig.21 Distribution of excess pore pressure along observation line 2 with F_z applied

对比图 21 和图 20 可知, F_z 作用下的超静孔压峰值小于 F_x 下的峰值。这是因为: F_z 仅引起基桩的竖向振动, 地基中主要产生剪切波; F_x 则引起基桩

的水平振动, 地基中主要产生压缩波。由饱和地基基本构方程(14)可知, 孔压响应与土骨架和孔隙流体的体变成正比, 而剪切波主要引起畸变, 从而 F_z 下的孔压响应更低。图 22 为 $a_0 = 0.1$ 时, 单位简谐弯矩 M_y 作用下的超静孔压分布。

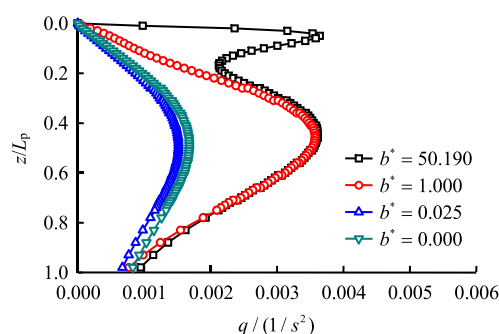


图 22 M_y 作用下超静孔压沿观察线 2 的分布
Fig.22 Distribution of excess pore pressure along observation line 2 with M_y applied

由图 22 可知, M_y 引起的超静孔压分别约为图 20(a) 的 15% 和图 21 的 50%, 说明简谐弯矩主要引起基桩的摇摆振动, 振动能量主要被桩身转动变形所分担、传递到地基中的能量较小, 从而造成超静孔压较小。

7 结 论

建立了群桩基础与饱和半空间动力相互作用的近似解析分析模型。在获得群桩基础的动力阻抗的同时, 求解了群桩基础刚性承台中心作用不同简谐荷载时饱和地基的振动和孔压响应, 并对荷载激振频率和地基渗透系数的影响进行了参数分析。研究结果表明:

(1) 饱和地基中群桩基础动力阻抗峰值所对应的激振频率会随着地基渗透系数的增加而增大; 饱和地基位移会在个阻抗曲线的拐点处出现位移极值。

(2) 荷载激振频率越高, 则地基位移衰减越快; 饱和地基渗透系数越低, 则位移峰值越小。

(3) 随着荷载激振频率的增加, 地基孔压沿深度出现明显波动; 低频时, 地基渗透系数越低, 孔压峰值越大; 高频时则相反。

(4) 群桩基础承台作用水平向动荷载时, 引起的地表位移和孔压响应峰值比竖向加载时大, 且后者又比弯矩加载时大。

参 考 文 献

[1] 史吏, 曹志刚, 潘晓东. 温州市域铁路 S1 线一期工程

对状元水厂振动影响评估及控制对策研究报告[R]. 杭州: 浙江工业大学, 2016.

SHI Li, CAO Zhi-gang, PAN Xiao-dong. Research report on the vibration impact assessment and control strategy of the first phase project of Wenzhou municipal railway line S1[R]. Hangzhou: Zhejiang University of Technology, 2016.

- [2] RAJAPAKSE R K N D, SHAH A H. On the longitudinal harmonic motion of an elastic bar embedded in an elastic halfspace[J]. **International Journal of Solids and Structures**, 1987, 23(2): 357—285.
- [3] PAK R Y S, JENNINGS P C. Elastodynamic response of pile under transverse excitations[J]. **Journal of Engineering Mechanics**, 1987, 113(7): 1101—1116.
- [4] ZENG X, RAJAPAKSE R K N D. Dynamic axial load transfer from elastic bar to poroelastic medium[J]. **Journal of Engineering Mechanics**, 1999, 125(9): 1018—1055.
- [5] WU G X, LIAM FINN W D. Dynamic elastic analysis of pile foundations using finite element method in frequency domain[J]. **Canadian Geotechnical Journal**, 1997, 34: 34—43.
- [6] MAMOON S M, KAYNIA A M. Frequency domain dynamic analysis of piles and pile groups[J]. **Journal of Engineering Mechanics**, 1990, 116(10): 2238—2257.
- [7] PADRON L A, AZNAREZ J J, MAESO O. Dynamic analysis of piled foundations in stratified soils by a BEM-FEM mode[J]. **Soil Dynamics and Earthquake Engineering**, 2008, 28: 333—346.
- [8] MAESO O, AZNAREZ J J, GARCIA F. Dynamic impedance of piles and groups of piles in saturated soils[J]. **Computers & Structures**, 2005, 83: 769—782.
- [9] 王小岗. 横观各向同性饱和层状土中垂直受荷群桩的动力阻抗[J]. 岩土工程学报, 2011, 33(11): 1759—1766.
- WANG Xiao-gang. Dynamic impedance of groups subjected to vertical load in layered transversely isotropic saturated soils[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2011, 33(11): 1759—1766.
- [10] 高广运, 何俊峰, 高萌, 等. 分层土中群桩水平动力阻抗的改进计算[J]. 岩土力学, 2010, 31(2): 509—515.
- GAO Guang-yun, HE Jun-feng, GAO Meng, et al. Improved calculation for lateral dynamic impedance of pile groups in layered soil[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2010, 33(2): 509—515.

- [11] 任青, 黄茂松, 钟锐, 等. 部分埋入群桩的竖向振动特性[J]. 岩土工程学报, 2009, 31(9): 1384—1390.
REN Qin, HUANG Mao-song, ZHONG Rui, et al. Vertical vibration of partially embedded pile groups[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2009, 31(9): 1384—1390.
- [12] DOBRY R, GAZETAS G. Simple method for dynamic stiffness and damping of floating pile groups[J]. **Geotechnique**, 1988, 38(4): 557—574.
- [13] 刘林超, 杨晓. 饱和土中桩-桩竖向动力相互作用及群桩竖向振动[J]. 工程力学, 2011, 28(1): 124—130.
LIU Lin-chao, YANG Xiao. Pile to pile vertical dynamic interaction and vertical vibration of pile groups in saturated soil[J]. **Engineering Mechanics**, 2011, 28(1): 124—130.
- [14] 蒯行成, 沈蒲生. 层状介质中群桩竖向和摇摆动力阻抗的简化计算方法[J]. 土木工程学报, 1999, 32(5): 62—70.
KUAI Xing-cheng, SHEN Pu-sheng. A simple calculation method for vertical and swing dynamic impedances of pile groups in layered medium[J]. **China Civil Engineering Journal**, 1999, 32(5): 62—70.
- [15] 熊辉, 江雅丰, 禹荣霞. 层状地基中基于 Laplace 变换的桩基横向振动阻抗计算[J]. 岩土力学, 2018, 39(5): 1901—1907.
XIONG Hui, JIANG Ya-feng, YU Rong-xia. Lateral vibration impedance of piles embedded in layered soil based on Laplace transform[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2018, 39(5): 1901—1907.
- [16] KAYNIA A M, KAUSEL E. Dynamic of piles and pile groups in layered soil media[J]. **Soil Dynamic and Earthquake Engineering**, 1991, 10(8): 386—401.
- [17] JIN B, LIU H. Dynamic response of a poroelastic half space to horizontal buried loading[J]. **International Journal of Solid and Structures**, 2001, 38: 8053—8064.
- [18] NOGAMI T. Thin layer element method for dynamic soil-structure interaction analysis of axi-symmetric structure in submerger soil[J]. **Soil Dynamics and Earthquake Engineering**, 1997, 16(5): 337—351.
- [19] 王鹏, 史吏, 王军, 等. 三维层状地基动力 Green 函数的薄层法求解. 岩土力学, 2014, 35(12): 3602—3610.
WANG Peng, SHI Li, WANG Jun, et al. Dynamic Green function solution of three-dimensional layered saturated ground using thin layer element method[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2014, 35(12): 3602—3610.
- [20] SHI L, XU C J, CAI Y Q, et al. Dynamic impedances and free-field vibration analysis of pile groups in saturated ground[J]. **Journal of Sound and Vibration**, 2014, 333: 3709—3731.
- [21] BIOT M A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid I. low frequency range[J]. **Journal of the Acoustical Society of America**, 1965, 28(2): 179—191.
- [22] DEGRANDE G, DE ROECK G. An absorbing boundary condition for propagation in saturated poroelastic media-Part I: formulation and efficiency evaluation[J]. **Soil Dynamics and Earthquake Engineering**, 1992, 12(7): 411—421.
- [23] CHEN S L, CHEN L Z, PAN E. Three-dimensional time-harmonic Green's functions of saturated soil under buried loading[J]. **Soil Dynamics and Earthquake Engineering**, 2007, 27: 448—462.

上接第 1749 页

- [30] 冯若琪, 朱哲明, 范勇. 砂岩半圆盘弯曲的复合型断裂性质及准则研究[J]. 四川大学学报(工程科学版), 2016, 48(增刊 1): 121—127.
FENG Ruo-qi, ZHU Zhe-ming, FAN Yong. Research on mixed-mode fracture properties and criteria by using sandstone SCB specimen[J]. **Journal of Sichuan University(Engineering Science Edition)**, 2016, 48(Suppl.1): 121—127.
- [31] 张盛, 王启智. 用变裂缝单一尺寸试样确定大理岩的断裂韧度[J]. 工程力学, 2007, 24(6): 31—35.
ZHANG Sheng, WANG Qi-zhi. Determination of marble fracture toughness by using variable-crack one-size specimens[J]. **Engineering Mechanics**, 2007, 24(6): 31—35.
- [32] 赵毅鑫, 龚爽, 姜耀东, 等. 基于半圆弯拉试验的煤样抗拉及断裂性能研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2016, 35(6): 1255—1264.
ZHAO Yi-xin, GONG Shuang, JIANG Yao-dong, et al. Characteristics of tensile strength and fracture properties of coal based on semi-circular bending tests[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2016, 35(6): 1255—1264.